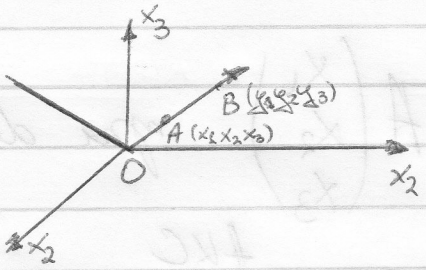
АГ Иванов 27.11.12

R^3



$A \sim A$

$A \sim B \Rightarrow B \sim A$

$A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

релация на еквивалентност

В еквиформа релация на еквивалентност между точките в $\mathbb{R}^3$

$A \sim B$ ако A и B лежат на една права през началото O или $x_1x_2x_3 = P(y_1y_2y_3)$

$[(x_1x_2x_3)] \cong$ права

хомогенни координати $A = (xyt) = P(xyt) = A$

$\mathbb{R}^3/\sim = \mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{R}^2 \cup \{\Omega\}$

$[(x_1x_2x_3)] \to P(x = x_1, y = x_2, t = x_3)$

$[(xyt)] \leftarrow P(xyt)$

Взимаме друг представител

$(y_1y_2y_3) \in [(x_1x_2x_3)]$ но

$$\left.\begin{array}{l}(y_1y_2y_3) = Q(x = y_1, y = y_2, t = y_3) \\ [(x_1x_2x_3)] = P(x_1x_2x_3)\end{array}\right\} \Rightarrow (y_1y_2y_3) = f(x_1x_2x_3)$$

$\Rightarrow P \equiv Q$

$$\begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{при } \det(A) \neq 0$$

АКС

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и $P(h_1 h_2 h_3)$ – хомогенни афинни координати

$A \in M(F)$ с $\det(A) \neq 0$ то

хомогенните проективни координати $x_1 x_2 x_3$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$ тогава

$$K = O[A_1 A_2 A_3 E]$$
$$100 \quad 010 \quad 001 \quad 111$$

$$A \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} h_1 + a_{12} h_2 + a_{13} h_3 \\ a_{21} h_1 + a_{22} h_2 + a_{23} h_3 \\ a_{31} h_1 + a_{32} h_2 + a_{33} h_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ по аргументи помножени на A_1

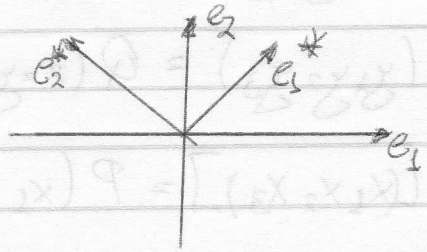
$$h_1 = \frac{A_{11}}{\det(A)} \; ; \; h_2 = \frac{A_{12}}{\det(A)} \; ; \; h_3 = \frac{A_{13}}{\det(A)}$$

От $AA^{-1} = E$ имаме

$$h_1 = \frac{A_{21}}{\det(A)} \quad h_2 = A_{22} \; , \; h_3 = A_{23} \Rightarrow A_2$$

Сама координатна система

$$\boxed{e^* = T^* e}$$



$$\begin{pmatrix} e_1^* \\ e_2^* \\ e_3^* \end{pmatrix} = T^t \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \qquad \boxed{(T^t)^{-1} e^* = e}$$

$$(x_1 x_2 x_3) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = x^t e = x^{*t} e^* = x^{*t} T^t e$$

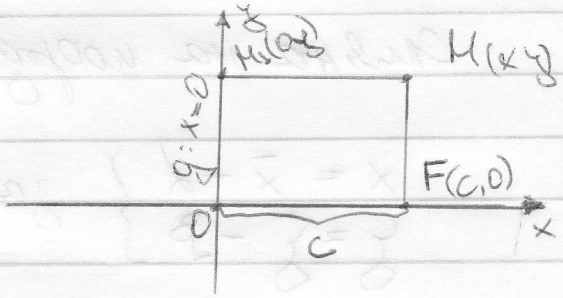
$$x^t = x^{*t} T^t \Rightarrow \boxed{x = x^* T} \quad / \cdot T^{-1} \Rightarrow x^* = T^{-1} x$$

Смяна координатите чрез матрици

Конични сечения

Геометрично място на точки (ГМТ), за които отношението на разстоянието до фиксирана точка и фиксирана права е постоянна в $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\varrho(MF)}{\varrho(M_1 g)} = e$$



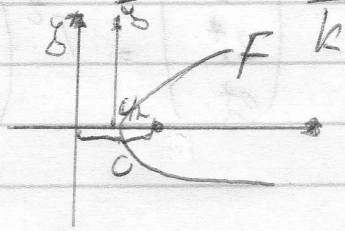
$$\frac{\sqrt{(c-x)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2}} = e$$

$$(c-x)^2 + y^2 - e^2 x^2 = 0$$

$$(1-e^2)x^2 + y^2 - 2cx + c^2 = 0$$

имаме 2 основни случая

1) $e=1 \Rightarrow y^2 - 2cx + c^2 = 0$



$\bar{k} = O e_1 e_2$

Ако преместим началото то новата координата има y-ето

$\bar{y} = y \qquad \bar{x} = x - a \Rightarrow x = \bar{x} - a \Big\} \Rightarrow$

$\bar{k}: \bar{y}^2 - 2c(\bar{x} - a) + c^2 = 0$

$\bar{y}^2 - 2c\bar{x} + 2ac + c^2 = 0$

$\bar{y}^2 = 2cx \qquad a = -\frac{c}{2} \Big\} \Rightarrow$

$\bar{x} = x - \frac{c}{2}, \quad \bar{y} = y \Rightarrow$

$F\left(\bar{x} = \frac{c}{2}, \bar{y} = 0\right)$

$g\left(x = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{c}{2}\right)$

F - фокус

g - директриса

2) $e \neq 1$

$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2cx + c^2 = 0$

Смяна на координатната система (транслация)

$x = \bar{x} - \alpha$
$y = \bar{y} - \beta$ } заместване

$\bar{k}: (1-e^2)(\bar{x}^2 + 2\bar{x}\alpha + \alpha^2) + (\bar{y} + \beta)^2 - 2c(\bar{x} + \alpha) + c^2 = 0$

заменяме $0 = \beta$ т.е. $y = \bar{y} + \beta = \bar{y} \Rightarrow \beta = 0$

$(1-e^2)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{x}(2\alpha(1-e^2) - 2c) + \alpha^2(1-e^2) - 2c\alpha + c^2$

$\alpha = \frac{c}{e^2 - 1} \qquad \bar{k}: \begin{cases} x = \bar{x} + \frac{c}{e^2-1} \\ y = \bar{y} \end{cases}$

$$\overline{K}: (1-e^2)\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - \frac{c^2}{e^2-1} - \frac{2c^2}{e^2-1} + c^2 = 0$$

$$c^2\left(\frac{-3}{e^2-1} + 1\right) = \frac{e^2}{e^2-1}(e^2-4)$$

$$\boxed{\overline{K}: (1-e^2)\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \frac{c^2e^2}{1-e^2}}$$

3) $e < 1$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad / \cdot \left(\frac{1-e^2}{c^2e^2}\right)$$

эллипса

$$a^2 = \frac{c^2e^2}{(1-e^2)^2} \qquad b^2 = \frac{c^2e^2}{1-e^2}$$

4) $e > 1$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

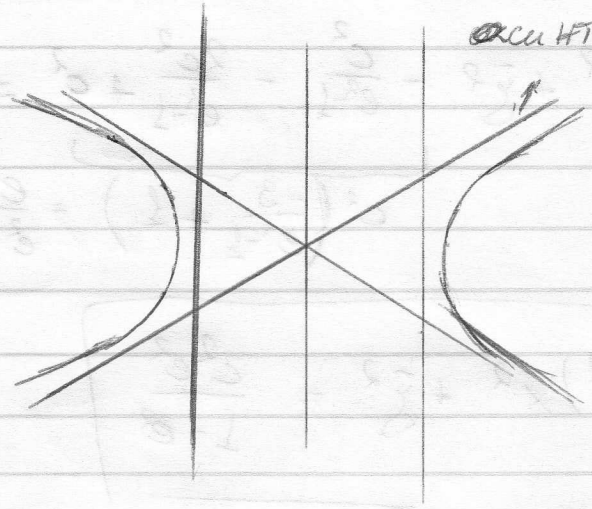
гипербола

$$a^2 = \frac{c^2e^2}{(1-e^2)^2} \qquad b^2 = \frac{c^2e^2}{e^2-1}$$

$$\bar{x} = x - \frac{c}{1-e^2} = -\frac{ce^2}{1-e^2} = -c$$

$$a^2 - b^2 = \frac{c^2e^2}{1-e^2}\left(\frac{1}{1-e^2} - 1\right) = c^2$$

$$\bar{x} = -\frac{c}{1-e^2} = \pm\frac{a^2}{c^2}$$



Отражение св-во



